ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia, 2º semestre, 1ª Prova Intercalar 09. 04.18
1 hora. (10 valores)

Nome:____**Nº:**_________

Espaço reservado para classificações				
1a.(15)	2a.(10)	2c..(15)	3a..(10)	4. (15)
1b.(10)	2b.(15)	2d.(10)	3b. (5)	T:

Atenção: todas as questões devem ser devidamente formalizadas e justificadas.

1. O Pedro tem uma guitarra elétrica, uma guitarra acústica, uma viola e um baixo. Ele toca na guitarra elétrica 60% das vezes, na guitarra acústica 15% das vezes, na viola 20% das vezes. Sabe-se ainda que metade das vezes em que toca guitarra elétrica o pai queixa-se do barulho que ele faz. Quando toca qualquer dos outros instrumentos, o pai queixa-se do barulho em apenas 10% das vezes.

a) O pai do Pedro acaba de se queixar do barulho, qual a probabilidade de ele estar a tocar baixo?

A – tocar guitarra elétrica, B – tocar guitarra acústica, C – tocar viola, D – tocar baixo

E – pai queixar-se do barulho

$$P(A) = 0.6;\ P(B) = 0.15;\ P(C) = 0{,}2;\ P(D) = 1 - [P(A) + P(B) + P(C)] = 0{,}05;$$

$$P(E|A) = 0{,}5;\ P(E|B) = P(E|C) = P(E|D) = 0{,}1;$$

$$P(D|E) = \frac{P(D \cap E)}{P(E)}$$

$$= \frac{P(E|D)*P(D)}{P(E|A)*P(A)+P(E|B)*P(B)+P(E|C)*P(C)+P(E|D)*P(D)} = \frac{0{,}005}{0{,}34} = 0{,}0147$$

b) Selecionadas, com reposição, 5 vezes em que o Pedro toca, qual a probabilidade de estar a tocar guitarra elétrica em 4 delas?

Esquema binomial

$$P(\text{ tocar guitarra elétrica em 4 das 5 vezes em que toca}) = \binom{5}{4} 0.6^4(1 - 0.6) = 0.2592$$

2. Seja X uma variável aleatória e a função::

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} & 0 < x < 1 \\ \frac{2}{9}x & 1 < x < 2 \end{cases}$$

a) Determine a função distribuição da v.a. X e classifique-a, **justificando**

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \int_0^x \frac{2}{3}dx = \frac{2}{3}\ x & 0 < x \leq 1 \\ \frac{2}{3} + \int_1^x \frac{2}{9}xdx = \frac{x^2}{9} + \frac{5}{9} & 1 < x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} F_X(x) = F_X(0);\ \lim_{x\to 1^+} F_X(x) = \frac{2}{3} = F_X(1)\,;\ \lim_{x\to 2^+} F_X(x) = 1 = F_X(2)$$

Então, não existem pontos de descontinuidade de $F_X(x)\ \Rightarrow D_X = \emptyset$ e pode concluir-se que a variável aleatória X é contínua.

b) Seja a variável aleatória definida por $Y = \begin{cases} 0 & X \leq 1.5 \\ 1 & X > 1.5 \end{cases}$. Determine a função distribuição da v.a. Y.

$$A_0 = \{x: y = 0\} = \{x: x \leq 1.5\} \Rightarrow P(Y = 0) = P(X \leq 1.5) = F_X(1.5) = \frac{29}{36}$$

$$A_1 = \{x: y = 1\} = \{x: x > 1.5\} \Rightarrow P(Y = 1) = P(X > 1.5) = 1 - F_X(1.5)$$

$$= 1 - \frac{29}{36} = \frac{7}{36}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 29/36 & 0 \leq y < 1 \\ 1 & y \geq 1 \end{cases}$$

c) Calcule o valor esperado e a mediana da variável aleatória X. Dos resultados obtidos o que pode concluir sobre a simetria da respectiva distribuição?

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x * f_X(x)dx = \int_0^1 x * \frac{2}{3}dx + \int_1^2 x * \frac{2}{9}xdx =$$

$$= \frac{2}{3} * \frac{x^2}{2}\Big]_0^1 + \frac{2}{9} * \frac{x^3}{3}\Big]_1^2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} * \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{25}{27}$$

$$\mu_e = \xi_{0.5}: P(X \leq \xi_{0.5}) = 0.5 \Leftrightarrow \frac{2}{3}\,\xi_{0.5} = 0.5 \Leftrightarrow \xi_{0.5} = \frac{3}{4}$$

Como $E(X) \neq \mu_e$, a distribuição da v.a. X não é simétrica.

d) Sabendo que a variância da variável aleatória X é igual a $0{,}33$, calcule a variância da variável aleatória $W = 2X - 1$.

$$Var(W) = Var(2X - 1) = 4 * Var(X) = 1.32$$

3. Considere a variável aleatória bidimensional (X, Y) com função probabilidade conjunta dada pela tabela:

$x \backslash \quad y$	1	2	3	$f_X(x)$
0	0.1	0.1	0.15	0.35
1	0.1	0.1	0.1	0.30
2	0.15	0.1	0.1	0.35
$f_Y(y)$	0.35	0.3	0.35	

a) Calcule a $P(X|Y = 1)$. Com base no **<u>resultado obtido</u>** o que pode concluir sobre a independência das variáveis X e Y.

$$P(X = 0|Y = 1) = \frac{P(X=0,Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{0.1}{0.35} = \frac{2}{7}; P(X = 1|Y = 1) = \frac{P(X=1,Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{0.1}{0.35} = \frac{2}{7}$$

$$P(X = 2|Y = 1) = \frac{P(X=2,Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{0.15}{0.35} = \frac{3}{7}$$

Se $P(X = 0|Y = 1) = P(X = 1|Y = 1) = P(X = 2|Y = 1)$ a $P(X|Y = 1) \Rightarrow$ $P(X|Y = 1)$ não se alterava com o valor de Y o que indicaria a independência entre as variáveis X e Y. Como $P(X = 0|Y = 1) = P(X = 1|Y = 1) \neq P(X = 2|Y = 1)$, as variáveis X e Y são dependentes.

b) Determine o $E(Y)$.

$$E(Y) = \sum_{y \in D_Y} y * f_Y(y) = \sum_{j=1}^{3} y * f_Y(y) = 1 * 0.35 + 2 * 0.3 + 3 * 0.35 = 2$$

4. Sejam os acontecimentos $A, B, C \subset \Omega$ com probabilidades não nulas e mutuamente independentes. Justifique a igualdade: $P(A - B \mid C) = P(A).P(\bar{B})$.

$$P(A - B \mid C) = \frac{P[(A \cap \bar{B}) \cap C]}{P(C)} = \overbrace{\frac{P(A \cap \bar{B} \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A) * P(\bar{B}) * P(C)}{P(C)}}^{(1)\ e\ (2)}$$

$$= P(A) * P(\bar{B})$$

(1) – porque se A, B e C são independentes, então A, $\bar{B}$ e C também são independentes

(2) – porque A, $\bar{B}$ e C são independentes.